Revista AV Notas, N°14
ISSN: 2529-8577
Noviembre, 2023

MÚSICA EN 31 SONIDOS: ORIGEN, FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y PRAXIS DEL SISTEMA 31-EDO

MUSIC IN 31 SOUNDS: BACKGROUND, THEORETICAL BASIS AND PRACTICE OF THE 31-EDO SYSTEM

Pedro Saavedra Ortiz
Conservatorio Superior de Música *Victoria Eugenia de Granada. Universidad de Granada.*

RESUMEN

Muchos fueron los intentos que se realizaron, previamente a la llegada del igual temperamento, de crear un sistema musical teóricamente consistente y que pudiese ser puesto en práctica con solvencia. Desde el punto de vista histórico, fueron adoptándose diversas decisiones, desde la pureza matemática de la entonación justa, que condicionaron tanto la teoría como la práctica musicales, hasta alcanzar la afinación que nos es familiar actualmente. Y aunque los 12 sonidos que conocemos suponen una solución sencilla pero eficaz, otras divisiones de la octava en intervalos iguales permiten del mismo modo crear música tonal, con la terminología y los principios armónicos clásicos que nos son conocidos, con mínimas modificaciones.

Entre estas posibilidades alternativas, abordaremos el sistema resultante de escindir la octava en 31 partes idénticas, realizando un breve recorrido sobre su relevancia histórica y una exposición de sus preceptos teóricos elementales, así como del grato parecido que guarda con el igual temperamento; y trataremos de ilustrar su posición actual, así como su relación con la microtonalidad, a través de los trabajos de diversos compositores y arreglistas.

Palabras clave: Entonación justa; temperamentos mesotónicos; microtonalidad; 31-EDO; xenarmonía.

ABSTRACT

Before the arrival of equal temperament, there were many attempts to create a theoretically consistent musical system that could be put into practice adequately. From the mathematical purity of just intonation, musicians took numerous decisions throughout music history, which conditioned musical theory and practice, until we reached the tuning system we are familiar with today. And even though the 12 sounds we know pose a simple but effective solution, other divisions of the octave into equal intervals allow us to create tonal music likewise, using the terminology and classical harmonic principles we are familiar with, incorporating minimal modifications.

Among these alternative possibilities, we will approach the system that results by splitting the octave into 31 identical parts. We will make a brief tour of its historical relevance and expose its elementary theoretical precepts, including the pleasant similarity it bears to equal temperament. Finally, we will try to illustrate its current state and its relationship with microtonality through the works of various composers and arrangers.

Keywords: Just intonation; meantone temperaments; microtonality; 31-EDO; xenharmony.

INTRODUCCIÓN

La música es un hermoso universo donde confluyen discursos, diálogos, intenciones… Un lenguaje en el que, al menos en Occidente, aprendimos a comunicarnos mediante los doce sonidos de la escala cromática, actualmente reconocidos en todo el mundo. Aunque a veces pueda darnos la impresión de que este sistema es el *único posible*, o el que *debía ser* necesariamente, no debería olvidarse que esto no fue siempre así.

Los orígenes de los intervalos, la armonía y la geometría de las notas musicales se encuentra en un fenómeno acústico que gobierna la estructura y la constitución de los sonidos: la serie armónica. Mediante la existencia de armónicos sobre cualquier frecuencia fundamental, así como su distribución, la propia naturaleza nos sugiere un sistema en que la interválica se expresa en función de las proporciones que emergen entre unos intervalos y otros, y los acordes responden a la confluencia de varios de estos armónicos. En consecuencia, este sistema, conocido como *entonación justa*, es considerado como el de afinación más pura posible y el poseedor de una mayor capacidad de consonancia (Gann, 1997). Sin embargo, diversos factores lo vuelven esencialmente impracticable, siendo los más reseñables la infinitud de sonidos distintos presentes en él (tantos como armónicos hay), y la imposibilidad de realizar enarmonías.

Uno de los pasos evolutivos más relevantes respecto de este sistema llegó con el temperamento mesotónico de ¼ de coma. En él, las quintas se ajustan ligeramente (mediante una leve reducción de su tamaño) para lograr una mejor sonoridad de las terceras, especialmente las mayores, un intervalo de alto interés en el Renacimiento, cuando comenzó a ponerse en práctica (Goldáraz, 2010). Esta solución, no obstante, planteaba otra dificultad: el que hoy conocemos como *círculo de quintas* no se cerraba por completo tras concatenar doce quintas, sino que producía un pequeño error. Esto ocasionaba que ciertas notas en extremos opuestos del círculo (como la b y sol #) siguieran sin ser equivalentes, lo que impedía la posibilidad de tocar en todas las tonalidades

Finalmente, y tras explorar otras posibilidades, se llegó al compromiso de dividir la octava en doce partes idénticas, dando pie al igual temperamento, tan difundido hoy en día y apreciado por multitud de compositores (Daum, 2011). El igual temperamento permite modular libremente, equiparando todas las notas musicales, y equilibrando las desafinaciones entre los intervalos respecto de sus contrapartes en la entonación justa.

Sin embargo, nada obliga a que tengan que ser exactamente *doce* las notas musicales diferentes que puedan existir. Hay otra división de la octava en partes equidistantes, concretamente en treinta y una, que da lugar a una música de sonoridad muy similar a la de los dulces temperamentos mesotónicos, y su fundamento teórico guarda una reseñable semejanza con nuestro igual temperamento (Puhm, 2018). Este sistema, conocido como *31-EDO*, fue ya intuido en el siglo XVI (Kaufmann, 1970), y comenzó a adquirir popularidad especialmente a partir de los trabajos de Fokker (Fokker, 1955), con la construcción de un órgano con 31 teclas por octava. Con el paso de las décadas, ha alcanzado un estatus de cierta popularidad incentivado por el espíritu explorador de jóvenes compositores (Taylor, 2021; McClain, n.d.; Battaglia, 2021). En este artículo, trataremos de exponer las propiedades más relevantes del 31-EDO, cómo se articulan sus sonidos, y qué consecuencias sobre la armonía tiene la capacidad de ofrecernos; y expondremos algunas de las obras empleando este sistema musical.

LA ENTONACIÓN JUSTA

El desarrollo y la constitución del principal sistema teórico de afinación musical en Occidente, el igual temperamento, vinieron gobernados ante todo por el fenómeno físico-armónico, pues de él emanan todos los sonidos y proporciones que acabaron deviniendo en la consolidación y evolución de la armonía.

Esencialmente, cuando una cuerda tensa ideal vibra, produce no una, sino una sucesión de vibraciones, conocidas como modos propios de vibración, cuyas frecuencias guardan una relación muy particular: el segundo modo tiene una frecuencia doble al primero; el tercero, triple; y así sucesivamente. Esto da lugar a una familia de sonidos, conocida como *serie armónica,* a partir de una *fundamental*.

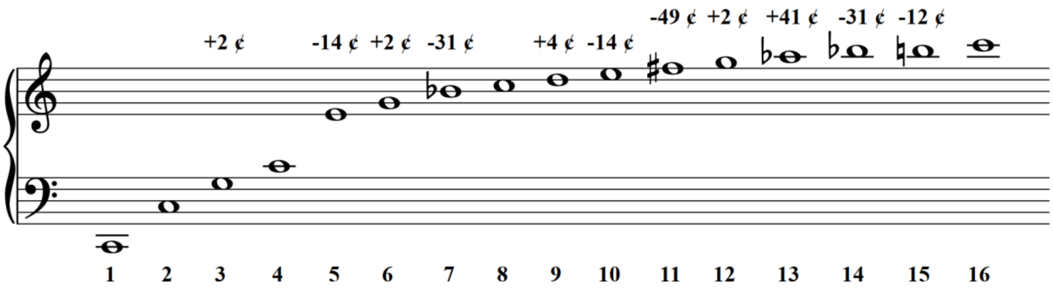

Fig. 1. Primeros 16 sonidos de la serie armónica a partir de la nota do$_2$. La imagen es de producción propia con los cálculos realizados a partir de https://www.plainsound.org/HEJI/index.php.

Además, dado que las frecuencias de todos los sonidos de la serie son múltiplos enteros de aquella de la fundamental, todas las notas guardan entre sus frecuencias una proporción (es decir, una fracción). Es de aquí de donde surge la vinculación de algunos intervalos familiares con razones, a partir de las notas que los conforman.

8.ª J	2
5.ª J	3/2
4.ª J	4/3
3.ª M	5/4
3.ª m	6/5
6.ª M	5/3
6.ª m	8/5
2.ª M	9/8 o 10/9 *(según contexto)*

Fig. 2. Algunos intervalos comunes y sus razones correspondientes (Gann, 1997)

Por ejemplo, si la nota la$_4$ tiene una frecuencia de 440 Hz, entonces su quinta justa superior, el mi$_5$, tendrá una frecuencia de $440 \cdot 3/2 = 660$ Hz. De este modo, los intervalos operan de forma *multiplicativa* sobre las notas: se agregan multiplicando y se sustraen dividiendo (Gann, 2019)[1] [2].

[1] Puede encontrarse una calculadora de intervalos justos en línea en el siguiente enlace: https://www.plainsound.org/HEJI/index.php

[2] Para una explicación en mayor profundidad sobre la aritmética en entonación justa y cómo combinar unos intervalos con otros, puede consultarse https://www.kylegann.com/tuning.html#tune1

Es de esta expresión natural de intervalos como proporciones entre números enteros de donde surge el sistema de la *entonación justa*, que, en última instancia, construye a partir de una nota dada todas las posibles proporciones para obtener el total cromático.

Además, la idea de expresar intervalos como razones puede extenderse a acordes (por ser estos superposiciones de intervalos), obteniendo, entre otros, los siguientes resultados:

Perfecto mayor	4:5:6
Perfecto menor	10:12:15
Aumentado	16:20:25
Disminuido	25:30:36

Fig. 3. Acordes triádicos y sus razones correspondientes (Suits, n.d.)

Por ejemplo, un acorde perfecto mayor se obtiene yuxtaponiendo a una 3.ª M (5/4) una 3.ª m (6/5), de donde se obtiene la proporción 4:5:6. De este modo, cada nota queda representada como una fracción (su proporción respecto de la fundamental tomada), y para calcular la distancia entre dos sonidos conocidos, basta con calcular el cociente de las fracciones que los representan, quedando el intervalo resultante expresado también en forma racional.

La entonación justa, aparentemente ideal en cuanto a *pureza* de afinación, presenta sin embargo ciertas dificultades. Exponemos las dos más notables a continuación (Segura, 2023).

- A partir de una nota, obtenemos una infinidad de sonidos diferentes, que (salvo cambios de octava) no guardan entre sí ningún tipo de enarmonía, lo que convierte a la entonación justa en un sistema impracticable en los instrumentos de afinación fija (como los de tecla). Por ejemplo, si partimos de la nota do y construimos quintas justas sucesivas, obtendremos sol, re… hasta llegar a la #, mi # y si #. Pero este si # no coincide con el do del que partimos, sino que vemos que es ligeramente más alto. La diferencia entre ambos (tras un conveniente transporte de octava) es conocida como *coma pitagórica*, y tiene un tamaño aproximadamente igual a un cuarto de nuestro semitono temperado (23,46 centésimas de semitono o *cents*).

  Podemos encontrar otro ejemplo de la ausencia de enarmonías en las terceras mayores. Nuevamente, a partir del do podemos concatenar cuatro quintas justas para obtener un mi, o bien una tercera mayor (5/4) que nos da también un “mi”. Pero los dos mis resultantes son, otra vez, diferentes, quedando entre ellos una distancia residual llamada *coma sintónica* (cuya fracción correspondiente es 81/80 y su tamaño es de 21,51 cents aproximadamente). Estas dos comas han sido un problema al que la teoría de la Música se ha enfrentado a lo largo de la historia. Por su interés, regresaremos a ellas más adelante.

  Gráficamente, la infinitud del modelo de la entonación justa puede visualizarse mediante una *red*, es decir, una cuadrícula o rejilla en la que moverse en una dirección representa siempre el mismo intervalo.

sol ♭↑↑	si ♭↑	re	fa ♯↓	la ♯↓↓
do ♭↑↑	mi ♭↑	sol	si ♮↓	re ♯↓↓
fa ♭↑↑	la ♭↑	do	mi ♮↓	sol ♯↓↓
si 𝄫↑↑	re ♭↑	fa	la ♮↓	do ♯↓↓
mi 𝄫↑↑	sol ♭↑	si ♭	re ♮↓	fa ♯↓↓

Fig. 4. Una posible red de afinación en entonación justa. En este modelo, un paso hacia arriba representa una quinta justa ascendente; y un paso hacia la derecha, una tercera mayor ascendente. Cada flecha representa una coma sintónica, según su orientación (Sabat & Nicholson, 2021)[3].

Un concepto muy similar es el Tonnetz: se trata de un diagrama en el que las notas quedan agrupadas por quintas justas en una dirección y por terceras mayores en otra diferente, formando un entramado compuesto por triángulos equiláteros. Al escoger estos intervalos, cada triángulo contiene las notas de un acorde perfecto, y los acordes contiguos en el diagrama a uno dado siempre son el relativo, el homónimo y el paralelo. Por este motivo, el Tonnetz puede resultar muy útil para comprender las relaciones tonales entre las notas y acordes de la armonía clásica[4] [5]. En su corazón, el Tonnetz se encuentra realmente fundamentado en la teoría neo-riemanniana de la armonía, que estudia los vínculos existentes entre los acordes contemplados de forma abstracta, desprovistos de función. Estas solo aparecen en términos *relativos*, en tanto que conectan a un acorde con otro, pero sin una tónica subyacente. Cada relación encuentra en el Tonnetz una materialización visual diferente, siendo la distancia entre dos acordes menor cuanto más próximos estén armónicamente entre sí (Cohn, 1998).

- Aun disponiéndonos a asumir su inmensidad, la *inmaculada afinación* que este sistema parece prometer se convierte en una quimera cuando nos desplazamos a un ambiente armónico algo más complejo: existen acordes que, por su propia constitución, son *imposibles de afinar* (en términos de proporciones sencillas, es decir, representables con números *pequeños*; o dicho de otro modo, construidos de tal modo que todos los intervalos contenidos en ellos estén afinados).Veamos un ejemplo. Supongamos que, a partir de la nota re, queremos construir un acorde de séptima de dominante con la tercera sustituida por una cuarta (es decir, *re-sol-la-do*), algo frecuente en la literatura musical (utilizado, por ejemplo, como apoyatura o acorde de paso). Procedemos como sigue: afinamos el sol como una 4.ª J sobre el re, y el la como una 5.ª J por encima. El sol y el la

---

[3] El vídeo https://www.youtube.com/watch?v=ZJfAVSVgaSI ilustra la red aquí presentada, mediante una secuencia de enlaces armónicos que producen que la afinación vaya ascendiendo paulatinamente por comas sintónicas.

[4] El vídeo https://www.youtube.com/watch?v=SIER9OE3OU0 muestra un fragmento de *Giant Steps* (J. Coltrane) en decenas de sistemas de afinación diferentes. Las notas son representadas en un diagrama que combina ideas de las redes de la afinación justa y del Tonnetz.

[5] Puede encontrarse una versión interactiva del Tonnetz en https://imaginary.github.io/web-hexachord/

se hallan entonces en proporción 9/8, lo que no ocasiona ningún conflicto. Ahora bien, ¿cómo afinamos el do? Esencialmente, tenemos dos posibilidades: desde el sol o desde el la. Si lo afinamos como una 4.ª J sobre el sol, entonces la 3.ª m la-do que aparece es demasiado estrecha; y si lo hacemos desde el la, entonces la cuarta sol-do es ancha en exceso.

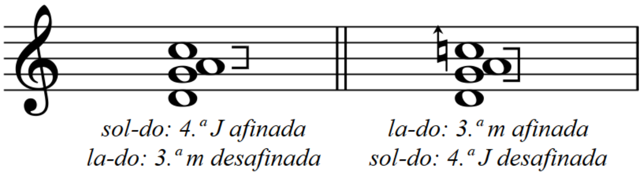

Fig. 5. Ilustración del fenómeno anterior (producción propia)

En definitiva, el sistema justo presenta incongruencias que pueden conducir a impedimentos o dificultades en la ejecución, y todo se debe a que los intervalos puros son *incompatibles* entre sí. Además, esto nos informa de que en todos los sistemas de afinación derivados del justo existirá cierta *desafinación inevitable*, que será repartida para tratar de esconderla en la medida de lo posible.

La búsqueda de soluciones a estos obstáculos fue, desde el punto de vista tanto teórico como práctico, un importante desafío. Dado que las quintas y las terceras mayores eran muy empleadas, se trató siempre de idear sistemas que incluyesen aproximaciones *razonables* de dichos intervalos. Finalmente, una de las respuestas que se encontraron, empleada al menos desde el siglo XVI, fueron los temperamentos mesotónicos, de los cuales nos concierne el de ¼ de coma.

EL TEMPERAMENTO MESOTÓNICO DE ¼ DE COMA

Como antes se ha indicado, la tercera mayor producida por la yuxtaposición de cuatro quintas es una coma sintónica más aguda que la justa. De este modo, si estrechamos artificialmente la quinta *justa*, haciéndola precisamente ¼ de coma más pequeña, entonces cuatro de ellas consecutivas producirán una tercera mayor exacta, contrarrestando el error que se cometía (Calvo-Manzano, 2002). El sistema resultante es conocido como *temperamento mesotónico de ¼ de coma*, recibiendo el calificativo de *mesotónico* porque el tamaño de su segunda mayor (tono) se encuentra comprendido entre las dos razones indicadas en la Figura 2: 9/8 y 10/9.

El temperamento mesotónico de ¼ de coma gozó de popularidad durante el Renacimiento y parte del Barroco. En la época de los tratados de Francisco de Salinas (1513-1590) y Gioseffo Zarlino (1517-1590), se diseñaron algunos instrumentos musicales siguiendo este sistema (Segura, 2023). Entre ellos, merece nuestra atención el órgano de la Catedral de Santa Bárbara (Mantua), construido en 1565. Dispone de 14 teclas por octava, abarcando desde el la b hasta el re # en el círculo de quintas[6].

Este temperamento continuó usándose, aunque cada vez en ámbitos más reducidos, hasta finales del siglo XIX, momento en que comenzó a vivir su decadencia definitiva. Experimentó un resurgimiento parcial en la segunda mitad del siglo XIX, cuando autores como György Ligeti (Schell, 2018) y John Adams recurrieron a él para explorar nuevas posibilidades tímbricas y armónicas (Goldáraz, 2010).

Con respecto al justo, este sistema de afinación presenta una ventaja: dado que hemos expresado la tercera mayor en función de la quinta, la red bidimensional de notas anteriormente mostrada pierde una dimensión y se transforma en una línea recta cuyo intervalo generador es la quinta, algo más sencillo de comprender conceptualmente. Dicho de otro modo, ahora podemos obtener todas las notas del sistema utilizando un solo

[6] Este órgano puede escucharse en https://www.youtube.com/watch?v=7GhAuZH6phs

intervalo: la quinta (recorrida ascendente y descendentemente), algo que anteriormente no sucedía. Como consecuencia, la coma sintónica desaparece, al haber sido distribuida de manera uniforme entre las notas musicales.

Sin embargo, como se ha sugerido, persiste el problema de la infinitud de sonidos diferentes, ante la ausencia de enarmonías. Ahora, las pequeñas diferencias existentes entre unas notas y sus *pretendidas* enarmónicas puede observarse a través de una *espiral*, en la que doce quintas *mesotónicas* (abusando del lenguaje) quedan ligeramente estrechas respecto de siete octavas (Milne, Sethares, & Plamondon, 2008).

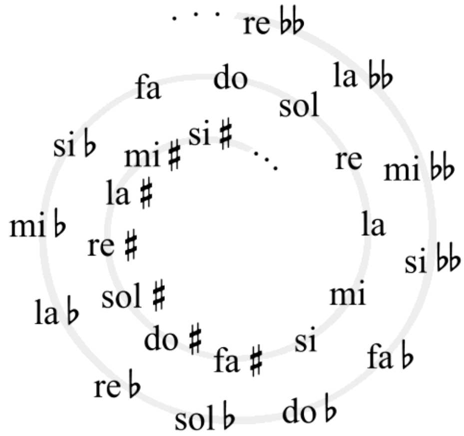

Fig. 6. La *espiral de quintas* característica de los temperamentos mesotónicos. Aquí, si # es más grave que do, al contrario que en la afinación justa[7] (Milne, Sethares, & Plamondon, 2008).

EL IGUAL TEMPERAMENTO (12-EDO)

La manera más pragmática de solventar la espiral anterior consiste en partir de una quinta de un tamaño adecuado. Si 12 quintas justas exceden ligeramente 7 octavas y 12 mesotónicas se quedan cortas, podemos redefinir la quinta para que 12 de ellas coincidan exactamente con 7 octavas, acertando a dar con una sonoridad comprendida entre los dos sistemas previos. Con esta elección, se constituye también un conjunto de notas *cerrado* (es decir, finito) de 12 sonidos diferentes, que, una vez transportados al ámbito de una octava, la dividen en 12 partes iguales. Es este el conocido como *igual temperamento*, al que, a modo de abreviatura, nos referiremos en lo sucesivo como 12-EDO (del inglés *equal divisions of the octave*)[8]. En lo sucesivo, y para unificar terminología, llamaremos también *n-EDO* a cualquier sistema de afinación derivado de dividir la octava en *n* partes iguales.

Al ser circular, el 12-EDO permite modular y transportar libremente, algo que, si bien era también posible en los sistemas convenientes, era más complejo por las desviaciones producidas en la afinación a causa de las comas (tanto las dos aquí mostradas como otras muchas más en las que no vamos a detenernos). Además, cuenta con la propiedad de ser el menor sistema de afinación derivado de una división regular de la octava que suministra aproximaciones de quintas y terceras lo suficientemente *buenas* como para representar de manera reconocible la armonía triádica clásica. Por último, es un temperamento

[7] En https://www.youtube.com/watch?v=z486ScNJBOo se ilustra este fenómeno con ejemplos auditivos. Adicionalmente, se compara el igual temperamento actual con otros sistemas de afinación, estableciendo una comparación entre ellos a través del tamaño de su quinta.

[8] Esta sigla, concebida por D. A. Stearns en 1999, es frecuentemente empleada en los recursos disponibles en la red; entre ellos, https://en.xen.wiki/w/Main_Page. No obstantes, son habituales también otras denominaciones como TET (de *tone equal temperament*) o simplemente ET (*equal temperament*), como puede verse más abajo en dicho enlace.

mesotónico, porque en él la coma sintónica desaparece, y tempera también la coma pitagórica. Dicho de otra manera, los sostenidos y los bemoles adquieren las enarmonías a las que estamos acostumbrados: de este modo, do # y re b son idénticos, y así ocurre con las demás notas.

Consecuentemente, el 12-EDO supone un compromiso entre un reducido número de notas diferentes y la proximidad de los intervalos a su forma justa, manteniendo una desafinación leve que nos resulta tolerable y a la que nuestro oído se ha acabado acostumbrando con la práctica musical. El siguiente cuadro muestra los errores que el 12-EDO comete al aproximar algunos intervalos comunes ("12edo - Xenharmonic Wiki", 2023).

Intervalo	Error
5.ª J	-1,96 ¢
4.ª J	+1,96 ¢
3.ª M	+13,69 ¢
3.ª m	-15,64 ¢
6.ª M	+15,64 ¢
6.ª m	-13,69 ¢

Fig. 7. Desviaciones en cents (¢) de los intervalos en 12-EDO respecto de sus contrapartes justas. Un signo positivo indica que el intervalo es demasiado ancho; y uno negativo, que es estrecho en exceso ("12edo - Xenharmonic Wiki", 2023).

Ante todo lo expuesto, hay una pregunta muy natural que puede emerger: ¿por qué 12 notas por octava? O más bien, ¿Es 12 exclusivamente el número que funciona? ¿O podríamos dividir la octava en otro número de partes iguales de manera que pudiésemos seguir escribiendo música tonal, con la armonía con la que nos hemos familiarizado desde la Práctica Común?

Interesantemente, el 12 no es la única solución posible. Es el número más pequeño que resuelve el problema, seguido por el 19 y el 31, en el que centraremos nuestro estudio, por su parentesco con nuestro igual temperamento (Puhm, 2018). Otros números, como el 41 o el 53, son también posibles, si bien generan otros sistemas con características algo más distanciadas de aquellas a las que estamos acostumbrados (Hall, 1985). El trasfondo matemático que hace emerger estos valores escapa de lo que aquí nos compete, aunque a modo de apunte citaremos que está estrechamente relacionado con la distribución de los números primos[9].

EL 31-EDO

Introducción histórica

Hay evidencias históricas de que la división de la octava en 31 partes se contempló como una posibilidad de afinar los instrumentos antes de la aparición del igual temperamento. Esto se debe a que 31 quintas mesotónicas completan 18 octavas con un error de tan solo 6,07 ¢[10], de forma que temperándolas adecuadamente podría cerrarse el ciclo.

[9] Para más información, en https://en.xen.wiki/w/The_Riemann_zeta_function_and_tuning (entrada parcialmente redactada por Mike Battaglia) se pueden encontrar los detalles matemáticos que respaldan la aparición de estos números (y otros) con propiedades particulares.

[10] Esto se debe a que, por corresponderse con el intervalo $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{80}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$, 31 quintas mesotónicas ocupan $31\cdot 1200\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{80}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = 21593{,}93$ ¢, solo 6,07 ¢ por debajo de 18 octavas ($18\cdot 1200 = 21600$ ¢).

Como explica Wild (2014), especial mención merece Nicola Vicentino (1511-ca. 1575), quien, conocedor de este hecho, describió en 1555 un instrumento de tecla, llamado *arcicembalo*, construido con 31 teclas por octava para poder tocar en todas las tonalidades de una manera bien afinada, resultando en una sonoridad muy similar, si no idéntica, a la del temperamento mesotónico de ¼ de coma. En 1974, Marco Tiella y la casa Formentielli confeccionaron una réplica del arcicembalo de Vicentino, siguiendo fielmente sus indicaciones[11].

Posteriormente, y según señala Kaufmann (1970), Lemme Rossi (s. f.-1673) fue el primero en contemplar la posibilidad de hacer esas 31 partes *iguales*, tiempo antes que el más conocido científico Christiaan Huygens[12] (1629-1695). Es aquí donde el 31-EDO encuentra su genuino albor; y, si bien cayó en desuso con la introducción de los temperamentos irregulares barrocos, experimentó un resurgimiento notorio en el siglo XX gracias a los trabajos de Adriaan Fokker (1887-1972), físico neerlandés inventor de un órgano en 31-EDO que desde 2010 se encuentra en el Muziekgebouw aan 't IJ (Ámsterdam) dispuesto para su interpretación (Fokker-organ, 2022). Por último, la llegada de los sintetizadores y la tecnología digital ofreció un sinfín de posibilidades, una comodidad sin precedentes y una mayor accesibilidad para la exploración de la microtonalidad; y, entre ella, el 31-EDO (pues al tener más sonidos que el igual temperamento, dispone de intervalos más reducidos).

Notación

Existen diversas nomenclaturas para el 31-EDO. Nosotros, por su sencillez, expondremos aquí dos de ellas (aunque la segunda es una extensión de la primera):

- La *notación basada en el círculo de quintas* ("Relationship to 12-edo", 2023) da nombre a las notas del 31-EDO, siguiendo esta conocida herramienta de la música tonal, y sirviéndose exclusivamente de las alteraciones convencionales (bemol, natural y sostenido). Este sistema requiere el uso de dobles alteraciones para nombrar algunos de los sonidos, pero a cambio no precisa de la introducción de ningún símbolo nuevo.

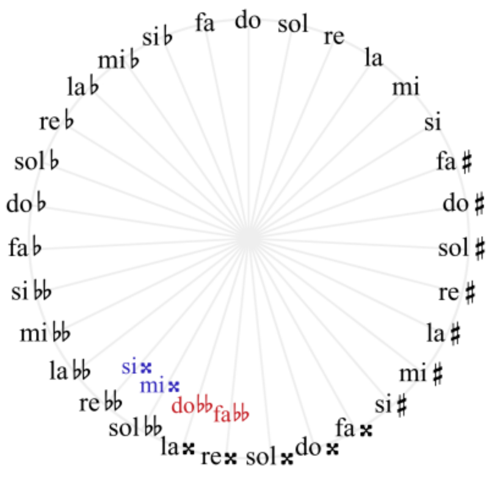

Fig. 8. Círculo de quintas en 31-EDO, con enarmonías hasta las dobles alteraciones ("Relationship to 12-edo", 2023)

[11] Esta reconstrucción moderna del *arcicembalo,* afinada en el actual 31-EDO, puede escucharse en https://www.youtube.com/watch?v=bhGwjgZ8zIY

[12] Huygens redactó una carta en 1691 (https://www.huygens-fokker.org/docs/lettre.html), de carácter apologético a favor de la división de la octava en 31 partes iguales, donde pone en relieve las ventajas que para él tenía este sistema frente al entonces imperante temperamento mesotónico de ¼ de coma.

Nótese que, dado que en este sistema la coma pitagórica no se tempera, los sostenidos y los bemoles dejan de ser enarmónicos; por ejemplo, re b es ligeramente más agudo que do #. La diferencia entre ambos es de 1/5 de tono, intervalo conocido como *diesis*[13], el más pequeño existente en 31-EDO y al que volveremos a aludir más adelante.

La escala cromática, bajo esta notación, quedaría como sigue.

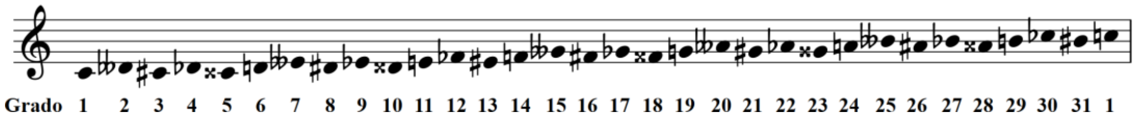

Fig. 9. Escala cromática en 31-EDO ("Relationship to 12-edo", 2023)

- Dado el importante papel de la diesis en 31-EDO, existe otro sistema, compatible con el anterior, que agrega dos nuevas alteraciones: ^ y v, que (respectivamente) elevan y rebajan en una diesis el sonido al que alteran. Estos símbolos se escriben, por convenio, delante de sostenidos y bemoles, así como del nombre de la nota (cuando se indica por escrito). Esto genera nuevas enarmonías posibles, por ejemplo: ^do # y re b son la misma nota, y lo mismo sucede con vsi bb y la. Este sistema fue concebido por Kite Giedraitis[14], músico y desarrollador de software, y puede extenderse con facilidad a otros EDOs, con hasta 72 sonidos por octava (Giedraitis, 2017). En lo sucesivo, seguiremos su notación, a menos que se especifique lo contrario.

Estas dos notaciones tienen la ventaja de que *extienden* a la del 12-EDO, en el sentido de que cualquier partitura escrita en 12-EDO podría ser leída directamente por un instrumento afinado en 31-EDO, realizando como máximo una modificación: el *ajuste* de las enarmonías existentes en 12-EDO a sus equivalentes en 31-EDO (o a sus vecinos más cercanos, para buscar un color sonoro particular)[15 16 17].

Interválica

En 31-EDO, se pierde la enarmonía entre intervalos como la 7 ª m y la 6 ª A, o la 4 ª A y la 5 ª D. En todos los casos, es la diesis la que produce tales discrepancias, con repercusiones directas en el lenguaje armónico. El siguiente cuadro resume todos los intervalos existentes en 31-EDO (Puhm, 2018):

[13] En la literatura, este término tiene varias acepciones, pero la que aquí exponemos encuentra su origen en los temperamentos mesotónicos y, en última instancia, en el intervalo 128/125 de la entonación justa, conocido bajo el mismo nombre: https://en.xen.wiki/w/128/125

[14] En https://www.tallkite.com/about.html se muestra parte de sus proyectos y de su labor como músico en la actualidad.

[15] Como ejemplo, Cam Taylor interpreta en https://www.youtube.com/watch?v=rHka91Sodjs la pieza *Kinderszenen* Op. 15, n.º 13 (R. Schumann) en 31-EDO. Las notas elegidas son, salvo en momentos puntuales (para modificar levemente el color armónico), las más próximas a nuestro igual temperamento.

[16] Similarmente, en https://soundcloud.com/mwmccarthy/bach-prelude-in-c-31-edo se muestra una versión del Preludio en Do M BWV 846 (J. S. Bach) en 31-EDO, siguiendo el mismo criterio.

[17] Un arreglo más rico, pero de inspiración claramente clásica, puede encontrarse en https://www.youtube.com/watch?v=IlZv13YZzSM, donde Mike Battaglia interpreta *The House of the Rising Sun* (tradicional de EE.UU.) en 31-EDO.

Grado	Nombre	Nota	Grado	Nombre	Nota	Grado	Nombre	Nota	Grado	Nombre	Nota
0	unísono	do	8	3.ª m	mi b	16	5.ª D	sol b	24	7.ª D	si bb
1	diesis	^do	9	3.ª neutra	vmi	17	5.ª *semiD*	vsol	25	6.ª A	la #
2	unís. A	do #	10	3.ª M	mi	18	5.ª J	sol	26	7.ª m	si b
3	2.ª m	re b	11	4.ª D	fa b	19	6.ª D	la bb	27	7.ª neutra	vsi
4	2.ª neutra	vre	12	3.ª A	mi #	20	5.ª A	sol #	28	7.ª M	si
5	2.ª M	re	13	4.ª J	fa	21	6.ª m	la b	29	8.ª D	do b
6	3.ª D	mi bb	14	4.ª *semiA*	^fa	22	6.ª neutra	vla	30	7.ª A	si #
7	2.ª A	re #	15	4.ª A	fa #	23	6.ª M	la	31	8.ª J	do

Fig. 10. Intervalos en 31-EDO construidos sobre la nota do, con algunos de sus posibles nombres (Puhm, 2018)

A modo de comparativa, incluimos también los errores que comete el 31-EDO al aproximar algunos intervalos justos (Rapoport, 1987).

Intervalo	Error (12-EDO)	Error (31-EDO)
5.ª J	-1,96 ¢	-5,19 ¢
4.ª J	+1,96 ¢	+5,19 ¢
3.ª M	+13,69 ¢	+0,79 ¢
3.ª m	-15,64 ¢	-5,96 ¢
6.ª M	+15,64 ¢	+5,96 ¢
6.ª m	-13,69 ¢	-0,79 ¢

Fig. 11. Desviaciones en cents (centésimas de semitono) de los intervalos en 31-EDO respecto de sus contrapartes justas, comparadas con las del 12-EDO (Rapoport, 1987)

Como puede observarse, el 31-EDO tiene sus quintas más inexactas que nuestro igual temperamento. Sin embargo, sus excelentes terceras y sextas le confieren una sonoridad muy dulce y característica, idónea para aquellos géneros musicales donde predominen estos intervalos (piezas renacentistas, música modal…). Especialmente reseñable es la 3.ª M, prácticamente idéntica a la del temperamento mesotónico de ¼ de coma, por lo que, a efectos prácticos, el 31-EDO hereda el timbre de dicho sistema de afinación, con el atractivo adicional de que es cerrado.

Introducción a la (xen)armonía del 31-EDO

En lo que respecta a los acordes triádicos, el 31-EDO posee, del mismo modo que el 12-EDO, acordes perfectos mayores y menores, aumentados y disminuidos. Y a partir de lo expuesto anteriormente, podemos deducir que todos ellos están, de hecho, mejor afinados (en cuanto a la sonoridad de las terceras). Pero además, nos encontramos con tres nuevos tipos de acordes perfectos (Cam Taylor, n.d.). Estos son:

- Si a un acorde perfecto menor le rebajamos la tercera una diesis, obtendremos un acorde submenor. Tétrico, apagado y oscuro, aproxima muy decentemente la proporción 6:7:9 en entonación justa.
- Por el contrario, si alzamos la tercera de un acorde perfecto mayor en una diesis, aterrizaremos en un acorde supermayor, quizá más disonante, pero con una brillantez exacerbada muy peculiar. En entonación justa, se corresponde con la secuencia 14:18:21.
- Entre el mayor y el menor, surge un acorde neutro (en entonación justa, 18:22:27), que desciende directamente de la tercera neutra señalada en la Figura 10. La tercera neutra divide a la quinta justa exactamente por la mitad, por lo que este acorde puede percibirse como mayor en ciertos contextos y como menor en otros diferentes. Además, desempeña un papel excelente como blue note, dotando a la armonía jazzística de un nuevo color insospechado18.

Avanzando hacia la armonía cuatriádica, encontramos un abanico casi ilimitado de colores posibles. Al igual que las terceras, hay séptimas de cinco especies (submenores, menores, neutras, mayores y supermayores), y ambas pueden combinarse libremente. Llegados a este punto, cabe destacar la diferencia que surge entre el acorde de *séptima de dominante* y el de *sexta aumentada alemana*, que son enarmónicos en 12-EDO pero dejan de serlo aquí. En contra de lo que cabría esperar, el segundo es menos disonante porque se aproxima a una proporción más sencilla en entonación justa (concretamente, 4:5:6:7). Esto se debe a que, en 31-EDO, la sexta aumentada (o séptima submenor) aproxima un intervalo justo conocido como *séptima armónica*, cuya proporción es 7/4 y está directamente asociado con el séptimo parcial de la serie armónica.

Igualmente, merece la pena detenerse en el acorde de *séptima disminuida*. En 12-EDO, es un acorde cíclico, dado que cuatro terceras menores completan una octava. En 31-EDO, sin embargo, dicha concatenación sobrepasa la octava en una diesis, de manera que las diversas inversiones del acorde dejan de ser equivalentes entre sí, y a su vez pierden la enarmonía con la séptima disminuida en otras tonalidades. Por ejemplo, un acorde de 7.ª D de re sería *do #-mi-sol-si b,* mientras que uno de fa vendría dado por *mi-sol-si-re b*, y para cruzar el trecho entre uno y otro deberíamos aceptar la diesis existente entre do # y re b. Este hecho parece pretender guiarnos hacia otro mundo por explorar en este sistema de afinación: las modulaciones.

Si bien es cierto que el 31-EDO complica algunas modulaciones que nos resultan conocidas (principalmente, las enarmónicas, por razones evidentes), permite a su vez realizar otras que resultarían inconcebibles en 12-EDO. Probablemente, la más notable de todas sea (como cabía esperar) la modulación en una diesis, tanto ascendente como descendente. Existen diversas formas de conseguirla, entre las que destacan las siguientes:

- Concatenación de enlaces mediánticos (terceras y sextas mayores y menores). Es posible construir una progresión de acordes del mismo tipo separados a igual distancia, de forma que eventualmente se aterriza en la tonalidad de partida elevada o rebajada en una diesis, según corresponda. Son unas modulaciones muy dulces, definidas por la abundancia de cromatismos y los sutiles movimientos de las voces que las hacen posibles. He aquí algunos ejemplos:

[18] https://www.youtube.com/watch?v=7cv-nuSjbY4, https://www.youtube.com/watch?v=8Bi6bO-MCCo y https://www.youtube.com/watch?v=Bs-M5GXMVB8 pueden servir como introducción a estos acordes y a sus sonoridades. En contexto, pueden aportar interesantes matices a la armonía. Además, su ubicación en un marco armónico determinado es capaz de paliar la disonancia que podemos percibir en ellos al escucharlos de manera aislada, dado que no estamos acostumbrados a su timbre.

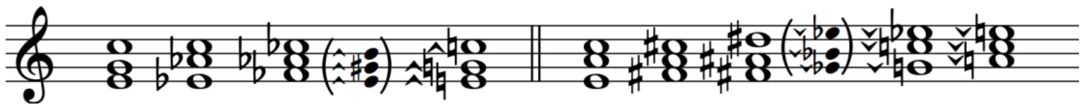

Fig. 12. Algunas modulaciones mediánticas en 31-EDO: de do M a ^do M y de la m a vla m. Las notas entre paréntesis indican una enarmonía del acorde anterior[19] (producción propia).

- Enlaces cromáticos de dominantes extendidas. De manera similar a como sucedía con la séptima menor y la sexta aumentada, hay una distancia de una diesis entre el intervalo de undécima aumentada (propio de las dominantes extendidas en jazz) y la *undécima armónica* (que aproxima el 11.º parcial de la serie armónica). Esto permite utilizar la undécima como nota común entre dos acordes con carácter de dominante separados por una diesis, y su función se verá transformada dependiendo del acorde en que se encuentre.

  Nuevamente, se trata de un enlace sutil, aunque cromáticamente más denso que el anterior. La ubicación de la oncena en este tipo de enlace puede ser muy efectiva, más aún si se combina con otros parciales de la serie armónica[20].

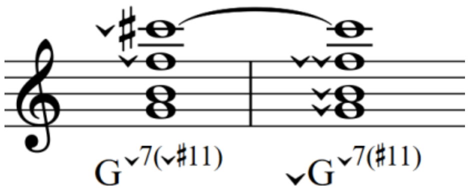

Fig. 13. Es posible transformar la 11.ª como parcial de la serie armónica en una tensión de dominante (Hear Between The Lines, n.d.)

- Yuxtaposición sin ningún tipo de enlace más allá del cromatismo, esto es, la colocación consecutiva de dos o más acordes, cada uno de ellos a una diesis de distancia del siguiente. Nuevamente, el jazz encuentra aquí un recurso de utilidad, al combinar el típico *turnaround* II-V con esta suerte de *modulación directa*. Cuando se hace de forma descendente, se produce un efecto similar al de la ralentización de los discos de vinilo[21].

Escalas y modos

Los nuevos sonidos aportados por el 31-EDO parecen indicarnos, similarmente, la posibilidad de configurar nuevos tipos de escalas y modos que de otra forma no podrían existir, así como el refinamiento de otros ya existentes. Mencionamos algunos ejemplos:

- La aparición de consonancias imperfectas (terceras y sextas) neutras abre la puerta a la existencia de modos basados en estos intervalos, así como de otros combinando intervalos neutros con convencionales (mayores y menores). Destaca la *escala neutra*, que (en términos interválicos) se encuentra comprendida entre la escala mayor y la menor natural, al utilizar la 3.ª, 6.ª y 7.ª neutras. Alternativamente, puede utilizarse la 6.ª M[22].

---

[19] Estos ejemplos están inspirados en https://www.youtube.com/watch?v=Bs-M5GXMVB8, donde pueden escucharse estas progresiones y otras semejantes.

[20] En https://www.youtube.com/watch?v=atbhMjD4PjM se desarrolla con mayor detalle el origen de este enlace (desde el punto de vista del jazz) y se muestran algunas de las combinaciones posibles.

[21] El arreglo https://www.youtube.com/watch?v=RGZ0JlMwZpY emplea esta (llamativa) técnica en repetidas ocasiones. Concretamente, aprovecha la diesis de separación existente entre si b y la #.

[22] Cam Taylor emplea en https://www.youtube.com/watch?v=Bs-M5GXMVB8 una escala neutra con la sexta mayor, ejecutando en ella una breve improvisación para ejemplificar su sonoridad.

Fig. 14. Comparación entre las escalas mayor, neutra y menor natural de do (producción propia)

Con una sonoridad característicamente ambigua entre lo mayor y lo menor, destaca entre los neutros un intervalo en particular: la tercera. Conocidas por Ptolomeo (alude a ellas en *Harmonikon*), las terceras neutras han encontrado posteriormente su uso en la música folclórica de multitud de culturas, como la árabe, la georgiana o la noruega. Aunque las terceras neutras que existen en sus sistemas musicales difieren unas de otras ligeramente, todas son bastante similares; y en particular, también lo son a la del 31-EDO.

- Una de las escalas sintéticas más conocidas es la *lidia dominante*, resultante de la combinación de los modos lidio (con la 4.ª A como nota característica) y mixolidio (con la coexistencia de la 3.ª M con la 7.ª m). A veces también se la denomina *escala acústica*, dado que recuerda a los parciales comprendidos entre el 8.º y el 14.º de la serie armónica. Si asumimos esta como una explicación válida para su constitución, entonces el 31-EDO nos brinda una escala acústica mucho mejor aproximada. Consecuentemente, presenta una resonancia natural más pura (la propia de los armónicos que la conforman) y rica, que pese a las disonancias internas que presenta la dota de una gran estabilidad. Su mejor afinación repercute igualmente en un color más puro de los acordes contenidos en ella; por ejemplo, el acorde místico (también llamado *acorde Prometeo*).

Fig. 15. Comparación entre la escala acústica en 12-EDO y en 31-EDO, a partir de la nota do (producción propia)

- Por último, dado que 31 y 30 son números contiguos, y 30 es divisible entre 10, la escala cromática del 31-EDO puede dividirse en 10 segmentos de longitudes similares que conforman las llamadas *escalas decatónicas*. Una de ellas es la formada por nueve segundas menores (con 3 diesis cada una) y una segunda neutra (4 diesis) en cualquier posición, alcanzando así la octava[23].

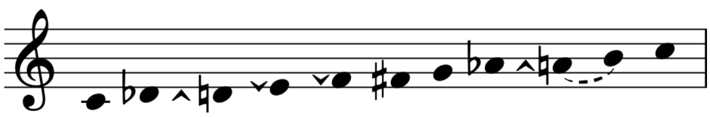

Fig. 16. Una posible escala decatónica construida sobre do (Battaglia, 2021). Todos los intervalos miden 3 diesis, salvo el intervalo ^la-si, que mide 4.

[23] Hacia el final del vídeo https://www.youtube.com/watch?v=RGZ0JlMwZpY pueden escucharse varias escalas decatónicas, en forma de rápidos movimientos cromáticos.

Música en 31-EDO: material, autores y obras

El instrumento que más ha acercado el 31-EDO al público general en los últimos años es, probablemente, el teclado Lumatone (Lumatone Inc., n.d.). Se trata de un dispositivo electrónico, formado por un panal de teclas hexagonales (similar a la botonera de un acordeón), que puede configurarse a voluntad del intérprete para ejecutar música en una multitud de sistemas de afinación; entre ellos, el que aquí nos concierne.

Supone la materialización de un diseño ideado por Siemen Terpstra (1948), músico neerlandés con experiencia microtonal en la guitarra. Él concibió una disposición espacial de los sonidos, similar a las *redes* de la entonación justa, en la que el intervalo comprendido entre dos teclas a la misma distancia era siempre el mismo. Esta propiedad fundamental hacía que las melodías y los acordes tuviesen siempre la misma *forma* y el transporte musical se convirtiese (literalmente) en *transportar* la mano, preservando todas las digitaciones, algo de gran comodidad interpretativa. Por este motivo, a este tipo de diseños se les conoce como *isomórficos*, porque las estructuras melódicas y acordales son siempre las mismas con independencia de la tonalidad.

Terpstra se basó en trabajos previos de Fokker, Paul von Jankó y Robert H. M. Bosanquet (Bosanquet, 1876); y, cuando su diseño llegó a las manos del ingeniero estadounidense Dylan Horvath, este comenzó a convertirlo en una realidad. Finalmente, en 2019 comenzó su producción, y desde entonces es distribuido a todo el mundo[24].

Es digno de mención el hecho de que el Lumatone tuvo un antecesor más de 40 años anterior: el Scalatron. Era un teclado, con la misma disposición que la ideada por Bosanquet, que constaba de 240 osciladores activados mediante los botones de sus teclas ovaladas, los cuales podían ser afinados de manera independiente. Su construcción fue posible gracias a los esfuerzos de Herman Pedtke y la compañía Motorola, a comienzos de los años 70 ("Motorola Scalatron - Microtonal Encyclopedia", 2018). George Secor (1943), teórico y compositor estadounidense, realizó experimentos con este instrumento, y obtuvo de él una impresión generalmente positiva[25].

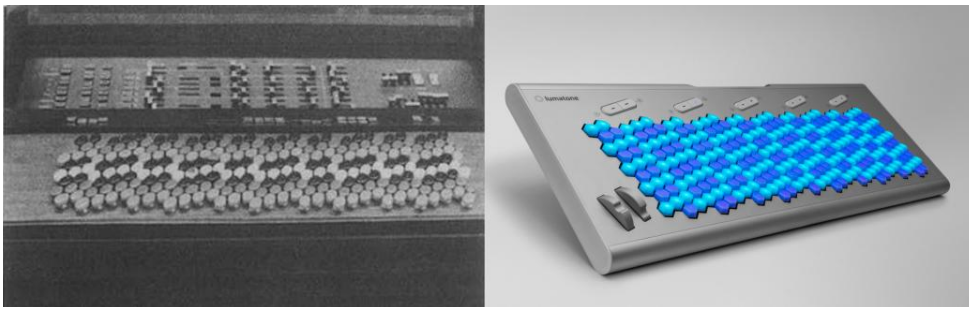

Fig. 17. A la izquierda, el Scalatron (fuente: Microtonal Encyclopedia). A la derecha, el teclado Lumatone (fuente: https://www.lumatone.io/).

Por otra parte, el 31-EDO no se habría popularizado sin la intervención de multitud de compositores, la mayoría de ellos jóvenes. Con este sistema de afinación, han logrado dar con atmósferas sonoras y aportar colores y timbres inexistentes en 12-EDO. Citamos a algunos de estos autores a continuación.

[24] La página web http://terpstrakeyboard.com/web-app/keys.htm es una aplicación que simula este tipo de teclado, ofreciendo una multitud de plantillas para varios sistemas de afinación (entre ellos, el 31-EDO). Es compatible con ordenadores y dispositivos móviles.

[25] Se ha conservado la grabación de una interpretación por parte de Secor en el Scalatron, disponible en https://www.youtube.com/watch?v=gNFK6PxgmRk

- Mike Battaglia (Mike Battaglia, 2021). Con sus orígenes musicales en el piano, mostró sus experimentos e investigaciones con la microtonalidad desde sus primeros vídeos de YouTube en 2011. Comenzó a trabajar con el teclado Lumatone en 2021, y entre sus aportaciones más exitosas se encuentran un arreglo de la canción *Sweet Lorraine* en 31-EDO, comentado por el propio Mike, y una interpretación de *Infant Eyes* (Wayne Shorter) también en este sistema.

- Cam Taylor (Cam Taylor, 2021). Pianista e improvisador neozelandés, ha publicado desde 2021 algunos de sus trabajos en el Lumatone, instrumento en el que ha centrado prácticamente la totalidad de su contenido. En su canal pueden encontrarse explicaciones sobre armonía modal, sistemas de afinación diversos (como el 31-EDO) y arreglos e improvisaciones. Su concepción de la armonía microtonal, como puede observarse en sus disertaciones, encuentra siempre su génesis mediante la armonía clásica en 12-EDO (por lo que suele resultar agradable al oído), y es expandida mediante algunos de los parciales de la serie armónica (entre los que destacan el 7º, el 11º y el 13º, que son los tres más sencillos después de las quintas y terceras a las que estamos acostumbrados).

- Amelia Huff (Huff, n.d.). Pianista conocida también bajo el sobrenombre Zheanna Erose, comenzó a indagar en la microtonalidad no más tarde de 2019, y adquirió el Lumatone en 2021, aparentemente poco tiempo después de descubrir el 31-EDO. Desde entonces, ha dedicado buena parte de su canal de YouTube a explorar este sistema y publicar vídeos donde muestra sus indagaciones armónicas, composiciones e improvisaciones. En 31-EDO, compuso (entre otras piezas) *Arrival* (Zhea Erose, 2021).

- El propio canal del teclado Lumatone (Lumatone Keyboard, 2022) expone introducciones divulgativas para multitud de sistemas de afinación en este instrumento, narradas e ilustradas mediante ejemplos por David James en la serie *Learning Lumatone*, que continúa activa actualmente. En este vídeo se presenta el 31-EDO, se muestra su constitución y algunos de sus intervalos característicos (como las distintas especies de terceras), y se incluye al final un breve fragmento musical basado en los nuevos conceptos armónicos propios de este sistema. Otro aspecto positivo de este canal es que, con frecuencia, ofrece visibilidad a artistas microtonalistas (como Battaglia y Huff) mediante la publicación en vídeo de sus últimas creaciones.

- Stephen Weigel (Weigel, n.d.). De origen estadounidense, estudió en la Universidad Estatal Ball (Indiana), donde cursó el Master's in Music Composition y el Bachelor's of Music Media Production. Tras haber investigado acerca de la teoría de conjuntos musical (un modelo matemático para representar las notas musicales y sus interrelaciones), se dedica actualmente a realizar composiciones y arreglos microtonales para una diversidad de instrumentos (teclado, guitarra, voz…), e interviene activamente en el pódcast *Now and Xen* con Sevish Music (Sevish, n.d.). Cabe destacar la partitura que realizó del arreglo de Battaglia de *Sweet Lorraine*[26], y una transcripción propia del conocido tema *Misty* (Errol Garner) en 19-EDO[27].

- Hear Between The Lines (Hear Between The Lines, n.d.). Se trata de un canal fundado en 2021 por dos amigos músicos residentes en Hamburgo, con contenido acerca de la teoría y la praxis de la microtonalidad, incluyendo explicaciones del

[26] Puede consultarse en https://www.youtube.com/watch?v=S5cRwz9On0Q
[27] El arreglo al que nos referimos es https://www.youtube.com/watch?v=YJLhpw-aqao

31-EDO desde febrero de 2022, en lo concerniente a la interválica, la armonía y otros aspectos. Han mostrado la motivación de usar este sistema desde el punto de vista del jazz y de sus posibilidades armónicas[28], así como puesto de manifiesto algunas de las variaciones entre la armonía del 12-EDO y la del 31-EDO, comenzando por los acordes triádicos y avanzando hacia armonías más complejas, mostrando todo este proceso mediante ejemplos auditivos[29]. Estos conocimientos son puestos en práctica en el cover que realizaron de *I Can See Clearly Now*[30], hecho posible gracias a la colaboración de Battaglia y otros artistas.

- Levi McClain (Levi McClain, n.d.). Compositor y diseñador de sonido, ha indagado en la microtonalidad y logrado exponer sus principios más fundamentales de forma muy cercana y sencilla en YouTube[31]. Uno de sus últimos trabajos ha consistido en una colaboración con Weigel y Braelen Addison para crear un arreglo de *True Love Waits* (Radiohead) en 31-EDO[32], empleando las nuevas tríadas disponibles (acordes submenores, supermayores y neutros) y otras técnicas.

Weigel, McClain y Hear Between The Lines emplean una notación algo diferente para escribir el 31-EDO, que aquí no hemos presentado. En lugar de añadir los símbolos ^ y v para representar alteraciones en una diesis, utilizan el medio sostenido (como equivalente a ^) y el medio bemol (análogo a v). Esta nomenclatura, quizá más conocida como icono de la microtonalidad, tiene, no obstante, un problema en 31-EDO: el hecho de que las armaduras de algunas tonalidades necesitarían sostenidos y bemoles simultáneamente, lo que les podría dar una apariencia foránea, como explica Weigel[33]. Los símbolos ^ y v solucionan este inconveniente; dado que, como sugiere Giedraitis (2019), a las armaduras convencionales podría agregarse un símbolo adicional (una flecha inscrita en una circunferencia) para indicar que todos los sonidos, además de según indique la armadura, han de alterarse ascendente o descendentemente.

Fig. 18. Comparación de las armaduras de si semibemol M (izquierda) y ^si b M (derecha) en 31-EDO, siguiendo la notación propuesta por Giedraitis. Ambas representan la misma tonalidad. La flecha inscrita en una circunferencia indica que, además de las alteraciones de la armadura, todas las notas deben elevarse en una diesis adicional. La imagen es de producción propia, basada en (Giedraitis, 2021) y (Weigel, n.d.).

[28] Concretamente, en https://www.youtube.com/watch?v=B1sdMP3Ne74

[29] El vídeo https://www.youtube.com/watch?v=atbhMjD4PjM da cuenta de sus explicaciones, desde una perspectiva tanto teórica como práctica.

[30] Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=Of_asBNSzjo

[31] En https://www.youtube.com/watch?v=8Bi6bO-MCCo, McClain realiza una sucinta pero concisa introducción al 31-EDO y sus posibilidades.

[32] Este arreglo, disponible en https://www.youtube.com/watch?v=aXRtb4kKYEk, está acompañado además por las explicaciones de McClain y sus compañeros acerca del proceso compositivo y los recursos que siguieron hasta llegar al resultado final. Resulta interesante cómo ciertas decisiones que tomaron sobre modificaciones de la armonía les condujeron a realizar otras sucesivas, en una cadena casi natural e impuesta por el sistema que utilizaron.

[33] En https://www.youtube.com/watch?v=E_VD3tqwCAM Weigel aborda el problema de las armaduras microtonales, las cuales (siguiendo la notación que él emplea) necesitarían a veces combinar sostenidos y bemoles simultáneamente. Ante esto, propone varias notaciones posibles, una de las cuales es la que se ha seguido para representar la armadura de la izquierda en la Figura 18.

- Cale Gibbard (Cale Gibbard, n.d.). Hay poca información en la red acerca de su trayectoria, pero sí se sabe que (además de música) estudió matemáticas[34] y que comenzó a componer utilizando el Lumatone en 2021, mostrando desde entonces improvisaciones y reflexiones sobre intervalos y patrones acordales en otros sistemas de afinación. De su uso de este instrumento, destaca especialmente la disposición de los sonidos que emplea: en lugar de la de Bosanquet-Wilson (la más estandarizada), Gibbard emplea la conocida como disposición de Wicki-Hayden, en la que las notas se ordenan según el círculo de quintas, de forma que teclas adyacentes siempre son consonantes entre sí (al lado de una tecla, quedan su 5.ª J, su 4.ª J, su 2.ª M y su 7.ª m, ninguno de los cuales es especialmente disonante). Esta configuración es muy útil para acordes modales y para el empleo de armonía por cuartas.

- Por último, cabe mencionar a Fabio Costa (FabioCostaMusic, n.d.). Es un compositor residente en Berlín que, una vez más, recibió su formación musical desde el piano. Después de componer para este instrumento e intervenir como director de orquesta, en 2010 comenzó a sentir interés por la entonación justa y otros sistemas de afinación. En 2014, llegó a su conocimiento el 31-EDO, que resultó ser la solución para los problemas prácticos que había encontrado en el sistema justo. Atraído por tal descubrimiento, acabó en contacto con la Fundación Huygens-Fokker (Ámsterdam), encargada del cuidado del órgano de Fokker; y transcurrido un tiempo, obtuvo la oportunidad de formar parte del *Mikrofest* de dicha fundación, para el cual escribió *Aphoristic Madrigal* (2015) para conjunto vocal a 4 y órgano[35].

Existen algunos recursos adicionales sobre el 31-EDO. Por ejemplo, Anton de Beer (1924-2000) redactó un resumen (de Beer, 1965, en Huygens-Fokker Foundation, n.d.) acerca del desarrollo de la música con 31 sonidos, desde 1940 hasta aquel momento (1965). También puede consultarse un ensayo de (Fokker, 1955) donde profundiza en el procedimiento que siguió Huygens hasta dar con lo que finalizaría siendo el 31-EDO, y justifica cómo este sistema podría solventar las limitaciones que algunos compositores encontraron en el 12-EDO (como Alois Hába, que trató de implementar cuartos de tono para reproducir fielmente las melodías populares de Checoslovaquia; y Béla Bartók, que consideraba la séptima armónica como una consonancia perfecta y lamentaba que este intervalo no tuviese una representación fiel en nuestro igual temperamento). Ambos documentos se encuentran en la página web de la Fundación Huygens-Fokker.

Paul Rapoport, musicólogo canadiense, redactó también un ensayo (Rapoport, 1987) acerca del 31-EDO como prólogo a su obra coral *Songs of fruits and vegetables* (1981-1984), escrita empleando este sistema (Rapoport, 2010). En él, desarrolló el fundamento acústico detrás de la serie armónica, algunas similitudes y diferencias entre el 12-EDO y el 31-EDO (desde el punto de vista musical y matemático), introdujo una posible notación para los 31 sonidos (muy similar a la empleada por Weigel et al.) y explicó cómo incorporar las nuevas interválicas y armonías a la interpretación, en particular en el canto. Defiende cómo la afinación en este sistema puede no suponer un reto tan complejo como el que podría esperarse, dado que (además de los ya citados) el 31-EDO aproxima de forma excelente multitud de intervalos justos, como el semitono diatónico (16/15), el semitono cromático (25/24) y los *tritonos* más estables (7/5 y 10/7).

Finalmente, podemos hallar un artículo de Terpstra (1988) donde se explica con aún más detalle este sistema, sirviéndose de algunos conceptos que hemos nombrado aquí

[34] Esta información fue encontrada en un comentario de un vídeo del canal de Gibbard, concretamente en https://www.youtube.com/watch?v=egnGmQ-Z5Us

[35] La interpretación y la partitura (la cual sigue la notación de Giedraitis) pueden encontrarse en https://www.youtube.com/watch?v=Lq9-6NnXPVg

(como el círculo de quintas, la entonación justa y el Tonnetz) en mayor profundidad. Asimismo, muestra cómo el 31-EDO encapsula las nociones de *sistema diatónico, cromático* y *enarmónico* de la música en la Antigua Grecia, y realiza una comparación visual entre los sistemas resultantes de dividir la octava en 12, 19, 31 y 53 partes iguales. Los tres primeros resultan ser mesotónicos y el último no, si bien brinda estimaciones muy buenas de una gran diversidad de intervalos justos. Terpstra incluye también una síntesis de todas las modulaciones posibles en 31-EDO empleando armonía triádica, interpretando su significado a través de una representación gráfica en el Tonnetz. Como cabe esperar, las más próximas son las más diatónicas; y las más distantes, las enarmónicas (interviniendo en ellas la diesis).

ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

Es claro que, en caso de que estuviéramos dispuestos a proporcionar una mayor difusión al 31-EDO, deberíamos afrontar ciertas trabas. Primeramente, desde un enfoque puramente teórico, sería necesario estandarizar una notación para este sistema. Los nuevos sonidos y alteraciones reciben varios nombres equivalentes. Por ejemplo, la flecha ^, conocida como *up symbol* (Giedraitis, 2014) o *comma up*[36], tiene un análogo en 31-EDO; a saber, el *medio sostenido*, conocido como *semisharp*[37] o *shat*[38], entre otras denominaciones; y con la armonía sucede de forma parecida[39]. Convendría unificar toda esta terminología para evitar confusiones. No solo eso, sino que, en el ámbito de la práctica, poder afinar correctamente todos los sonidos de este sistema supondría una mayor complejidad tanto en la ejecución de ciertos instrumentos (como la cuerda frotada, la voz, el trombón y, en general, los de libre afinación) como en el diseño de otros (tales como todos aquellos de viento que se activan con llaves, y los que disponen los sonidos en un teclado; si bien el Lumatone y otros dispositivos[40] han probado ser, al menos en el universo electrónico, una solución eficaz)[41].

Pese a todo, el 31-EDO tiene algunas buenas propiedades que lo distinguen de otros sistemas de afinación. De una parte, es un sistema relativamente *sencillo*, en el sentido de que (como antes) extiende la notación de nuestro igual temperamento respetando muchos hechos musicales que nos son conocidos (por ejemplo, que los acordes perfectos mayores se forman superponiendo una tercera mayor con una menor; y que con los menores se procede a la inversa), siendo las enarmonías el aspecto en que más difiere del 12-EDO, ciertamente. Esto puede desencadenar que, si bien con la necesidad de adaptarse a los cambios que propone este sistema, cualquier músico pueda experimentar cierta familiaridad con el 31-EDO desde su primer contacto con él[42].

---

[36] En https://www.youtube.com/watch?v=7-mFH3tA-dg puede escucharse este nombre, si bien empleado en el contexto de otro sistema de afinación (el 22-EDO). No obstante, la función de esta alteración es la misma.

[37] Weigel emplea este nombre en https://www.youtube.com/watch?v=aXRtb4kKYEk

[38] Hear Between The Lines, por el contrario, denomina a esta alteración de esta manera en https://www.youtube.com/watch?v=1Hxkz6Jn_oA y otros vídeos de su canal.

[39] El aquí denominado acorde neutro, por ejemplo, es mencionado con el nombre neutral en https://www.youtube.com/watch?v=Bs-M5GXMVB8 y, alternativamente, como mid en https://en.xen.wiki/w/31edo#Intervals

[40] Cabe mencionar el Claviton (https://www.dsilton.net/en/post/claviton), una adaptación del teclado del piano para cubrir 31 sonidos por octava; o las guitarras con 31 trastes por ocava (https://www.dsilton.net/en/post/31-tone-guitars), ambos de los mismos diseñadores, el grupo Dsilton.

[41] Este fragmento está inspirado en una reflexión que realizó un usuario internauta en un comentario de https://www.youtube.com/watch?v=Bs-M5GXMVB8, aunque por desgracia no hemos podido encontrar más información sobre él.

[42] Otros muchos fenómenos musicales, tan familiares por nosotros que los damos por supuesto, siguen siendo ciertos en 31-EDO. Por ejemplo, el hecho de que concatenando quintas justas podamos aterrizar en cualquier nota a partir de un punto inicial, o de que cuatro quintas concatenadas produzcan una 3.ª M dulce y consonante, son propiedades que otros muchos sistemas de afinación no poseen; por ejemplo, el 34-EDO (https://en.xen.wiki/w/34edo), comparable al 31-EDO en cuanto a sus dimensiones pero de una naturaleza diferente. Estos principios son, precisamente, los que han inspirado los párrafos siguientes.

Adicionalmente, como señala Monzo (2005), el 31-EDO es el menor EDO que representa con una fidelidad *aceptable* todos los intervalos justos derivados de los once primeros parciales de la serie armónica. Pero además de todo lo anterior, el 31-EDO tiene una propiedad matemática única: es, en un cierto sentido, el mejor EDO posible. Explicamos este hecho a continuación[43].

Vamos a buscar un sistema de afinación óptimo. Para ello, impondremos sobre él algunas condiciones *razonables*, para que sea intuitivo desde el punto de vista teórico e interpretativo:

1. Que esté basado en una división igual de la octava, es decir, que sea un EDO. Impondremos esta condición para preservar este intervalo en su forma pura.

2. Que sea mesotónico. Es decir, que su mejor aproximación de la quinta justa sea ligeramente estrecha para que la concatenación de cuatro de ellas suministre una tercera mayor próxima a la justa, y que *no haya* una mejor aproximación posible de la 3.ª M en el sistema.

3. Que la quinta sea un generador de todo el sistema. De este modo, el sistema podrá recorrerse usando únicamente este intervalo, y estará constituido por un solo círculo de quintas (en lugar de varios), para que guarde mayor similitud con el 12-EDO.

4. Que minimice el error cometido al aproximar la 5.ª J y la 3.ª M de la entonación justa. Aquí podríamos incluir otros intervalos, pero estos dos nos serán suficientes (dada su relevancia histórica y su extendido uso). Para medir la desafinación de estos intervalos, emplearemos el error cuadrático de las aproximaciones respectivas.

Supongamos, por tanto, que la mejor aproximación de la quinta en nuestro sistema mide x cents. Imaginemos también que, para afinar nuestros instrumentos, procederemos siempre por quintas. Bajo estos supuestos, observamos lo siguiente.

- Queremos que la quinta de nuestro sistema guarde cierto parecido con la proporción exacta $3/2$, que mide (aproximadamente) $701{,}955$ ¢. Por tanto, al aproximar la quinta en nuestro sistema estaremos cometiendo un error de $(x - 701{,}955)$ ¢.

- Tras cuatro quintas ($4x$) desde, por ejemplo, la nota do, alcanzamos la nota mi dos octavas más aguda. El intervalo combinado se acerca bastante a la suma de dos octavas (2400 ¢) y una tercera mayor justa (386,314 ¢), es decir, 2786,314 ¢. El error al aproximar dicho intervalo con cuatro de nuestras quintas es, por tanto, $(4x - 2786{,}314)$ ¢.

El error cuadrático total será, por tanto,

$$E_1(x) = (x - 701{,}955)^2 + (4x - 2786{,}314)^2 \text{ ¢}^2.$$

Este error es una función, dependiente del tamaño de nuestra quinta (x), que resulta ser una parábola positiva. Por tanto, alcanza un único mínimo, que resulta encontrarse en el valor $x_0 \approx 696{,}895$ ¢. Este es, teóricamente, el tamaño óptimo de nuestra quinta.

[43] El desarrollo sucesivo es de elaboración propia. Los criterios seguidos, el método de medición del error y el resultado final podrían ser diferentes, por más que el razonamiento mantuviese su validez. Después de todo, la cesión de una mayor importancia a ciertos parámetros condiciona qué sistema de afinación obtendremos como *óptimo*, en función de la finalidad que estemos persiguiendo.

Notemos, llegados a este punto, que la quinta del 31-EDO mide 696,774 ¢, por lo que solo difiere de la idónea en 0,121 ¢, una desviación imperceptible. Y, de hecho, vamos a demostrar que no hay otra mejor posible bajo nuestras premisas.

Comenzamos descartando EDOs excesivamente grandes mediante la siguiente apreciación. Llamaremos *intervalo mínimo* o *paso* al intervalo más pequeño (no unísono) que pueda construirse en un sistema. Por ejemplo, en el 12-EDO, el paso es el semitono; y en el 31-EDO, la diesis. En general, en un *n*-EDO, con *n* notas por octava, el intervalo mínimo medirá $\frac{1200}{n}$ ¢.

La diferencia entre la quinta justa pura (701,955 ¢) y la mesotónica "ideal" (696,895 ¢) es de 5,06 ¢. Por este motivo, cualquier EDO cuyo intervalo mínimo sea menor a esta cantidad tendrá una quinta justa "demasiado bien afinada" como para ser mesotónico, lo que le hará incumplir la Propiedad 2 y podremos descartarlo. Dado que

$$\frac{1200}{5{,}06} \approx 237{,}154,$$

cualquier EDO con 238 o más sonidos por octava no podrá satisfacer nuestro criterio. De este modo, estudiaremos únicamente los *n*-EDOs para *n* no superior a 237. De entre ellos, analizaremos a continuación cuál de ellos es mesotónico y tiene una quinta justa más próxima al valor x_0.

En un *n*-EDO, dado que el intervalo mínimo mide $\frac{1200}{n}$ ¢, la aproximación más cercana a la quinta ideal x_0 ocurrirá en $\left[x_0 \div \frac{1200}{n}\right]$ pasos, donde la operación $[\,\cdot\,]$ representa el redondeo al entero más cercano. En síntesis, puede comprobarse que el error absoluto que comete un *n*-EDO al aproximar la quinta mesotónica idónea es

$$E_2(n) = \left|\left[x_0 \div \frac{1200}{n}\right]\frac{1200}{n} - x_0\right| \text{ ¢},$$

para $1 \leq n \leq 237$. Vemos que $E_2(31) = 0{,}121$ ¢, como antes señalábamos. De existir algún EDO mejor, E_2 alcanzará un valor más pequeño, así que estudiamos si esto ocurre. Numéricamente, puede comprobarse que:

- E_2 resulta valer también 0,121 ¢ en todos los múltiplos de 31 (hasta el 217). Pero estos números (salvo el propio 31) quedan descartados, porque no están formados por un único círculo de quintas, sino que son copias de varios círculos de 31 quintas desfasados entre sí. Por tanto, no respetan la Propiedad 3, y consecuentemente podemos no considerarlos.

- Del resto de casos posibles, solo hay tres números hasta el 237 para los que E_2 alcanza un valor más pequeño: el 167, el 198 y el 229. Pero ninguno de estos EDOs es mesotónico, como se puede comprobar:

EDO	**Quinta mesotónica**	**Mejor aproximación de la quinta justa**	**¿Coinciden ambos valores?** ***(¿Es mesotónico el sistema?)***
167	697,006 ¢	701,205 ¢	No
198	696,97 ¢	703,03 ¢	No
229	696,943 ¢	702,183 ¢	No

Fig. 19. Análisis de las quintas en el 167, el 198 y el 229-EDO (producción propia)

Al no quedarnos más casos que descartar, concluimos que el 31-EDO es el mejor sistema posible, de acuerdo con los criterios que hemos establecido.

En cualquier caso, y con independencia del trasfondo matemático y acústico subyacente, el 31-EDO supone un claro cambio de paradigma sustancial respecto del 12-EDO. Cualquier sistema de afinación que difiera del justo supone, como antes señalábamos, un compromiso entre la pureza de la afinación de los intervalos que lo conforman; la variabilidad cromática que ofrezca; y su estructura, complejidad y usabilidad desde la perspectiva pragmática. En este sentido, el 31-EDO es, según Weigel[44], un *punto ideal* donde estos factores confluyen y se aprovecha lo mejor de cada uno. Por esta razón, junto con todas las ya explicadas (la mejor afinación de sus acordes, el abanico armónico que nos brinda…), el 31-EDO se muestra, en definitiva, como un sistema llamativo y en el que hay aún mucho por descubrir.

REFERENCIAS

31edo. (31 de mayo de 2023). En *Xenharmonic Wiki.* https://en.xen.wiki/w/31edo

31 equal temperament. (22 de mayo de 2023). En *Wikipedia* (en inglés). https://en.wikipedia.org/wiki/31_equal_temperament

5-limit. (14 de marzo de 2023). En *Xenharmonic Wiki.* https://en.xen.wiki/w/5-limit

https://www.huygens-fokker.org/whoswho/beer.html

Bosanquet, R. (1876). *An elementary treatise on musical intervals and temperament.* Macmillan and Co. https://en.xen.wiki/images/a/a7/Bosanquet_-_An_elementary_treatise_on_musical_intervals.pdf

Cale Gibbard. (s.f.). Cale Gibbard . Inicio [Canal de YouTube]. En https://www.youtube.com/@cgibbard/featured

Calvo-Manzano, A. (2002). *Acústica físico-musical*. Madrid: Real Musical.

Cohn, R. (1998). Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and a Historical Perspective. *Journal of Music Theory*, *42*(2), 167. https://doi.org/10.2307/843871

Comma pump. (6 de marzo de 2023). En *Xenharmonic Wiki.* https://en.xen.wiki/w/Comma_pump

Constantinsen, B., Fenn, J., Lewis, B., y Wang, C. (2019). *Terpstra Keyboard WebApp.* http://terpstrakeyboard.com/web-app/keys.htm

Costa, F. (7 de julio de 2016). *"Aphoristic Madrigal" 31-tone Microtonal, live performance: 4 voices & Organ-Fabio Costa, composer.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Lq9-6NnXPVg

Crab, S. (16 de noviembre de 2014). *The Motorola Scalatron*. En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=gNFK6PxgmRk

Daum, A. (2011). *The Establishment of Equal Temperament*. Cerdaville. En https://digitalcommons.cedarville.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=&httpsredir=1&article=1005&context=music_and_worship_student_presentations

De Beer, A. (1965). *The Development of 31-Tone Music.* En Huygens-Fokker Foundation. https://www.huygens-fokker.org/docs/beerart.html

Fokker, A. D. (1955). *Equal Temperament and the Thirty-one-keyed organ.* En Huygens-Fokker Foundation. https://www.huygens-fokker.org/docs/fokkerorg.html

Gann, K. (1997). Just Intonation Explained. Retrieved November 6, 2023, from https://www.kylegann.com/tuning.html

Gann, K. (2019). *The Arithmetic of Listening: Tuning Theory and History for the Impractical Musician*. Chicago: University of Illinois Press. En https://www.kylegann.com/Arithmetic.html

George Secor (10 de septiembre de 2018). En *Microtonal Encyclopedia*. https://microtonal.miraheze.org/wiki/George_Secor

Gibbard, C. (19 de febrero de 2022). *A thought about tritones and harmonic series.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=egnGmQ-Z5Us

[44] Su opinión puede encontrarse en https://www.youtube.com/watch?v=aXRtb4kKYEk

Gibbard, C. (9 de abril de 2022). *Random demo of Wicki-Hayden.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=-74lK1591co
Giedraitis, K. (2019). *Alternative Tunings: Theory, Notation and Practice.* https://tallkite.com/misc_files/notation%20guide%20for%20edos%205-72.pdf
Goldáraz, J. J. (2010). *Afinación y temperamentos históricos*. Madrid: Alianza Música.
Hall, D. E. (1985). A systematic evaluation of equal temperaments through N= 612. *Journal of New Music Research*, *14*(1-2), 61-73.
Hear Between The Lines. (29 de mayo de 2022). *I Can See Clearly Now - Microtonal Cover (31 EDO).* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Of_asBNSzjo
Hear Between The Lines. (22 de febrero de 2022). *No, 12 aren't enough.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=B1sdMP3Ne74
Hear Between The Lines. (31 de marzo de 2022). *You've never heard (of) these chords*. En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=atbhMjD4PjM
Huff, A. (7 de junio de 2022). *31-EDO Music Theory: Basic Triads.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=7cv-nuSjbY4
Huff, A. (20 de octubre de 2021). *Zhea Erose - Arrival | LUMATONE [31edo].* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=cvaymi7x1cM
Huygens, C. (1691). *Lettre touchant le Cycle Harmonique.* https://www.huygens-fokker.org/docs/lettre.html
Imaginary gGmbH. (s. f.). *The Tonnetz.* Consultado el 17 de mayo de 2023. https://imaginary.github.io/web-hexachord/
Kaufmann, H.W. (1970). More on the Tuning of the Archicembalo. *Journal of the American Musicological Society*. 23 (1): 84–94. https://doi.org/10.2307/830349
Keller, J. (7 de septiembre de 2016). *Vicentino: Madonna il poco dolce.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=bhGwjgZ8zIY
Kite Giedraitis. (20 de abril de 2023). En *Xenharmonic Wiki.* https://en.xen.wiki/w/Kite_Giedraitis
Lloyd, S. (6 de junio de 2018). *Quarter-comma Meantone with split sharps.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=7GhAuZH6phs
Levi McClain. (n.d.). Levi McClain. Inicio [Canal de YouTube] en https://www.youtube.com/@LeviMcClain/about
Lumatone Keyboard. (7 de julio de 2022). *Learning Lumatone: Episode 15 - "31-EDO Basics".* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=zXoU_7skZ1A
Lumatone Keyboard. (10 de abril de 2023). *Mike Battaglia - "House of the Rising Sun" (Full Performance, 31-EDO, Lumatone Artist Series).* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=IlZv13YZzSM
Lumatone Inc. (s.f.) *Lumatone: The Next Generation Isomorphic Keyboard.* Consultado el 27 de mayo de 2023. https://www.lumatone.io/ourstory
Mike Battaglia. (2021). *Sweet Lorraine (31-TET version) - Some Stride Piano for you all -. Mike Battaglia*. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=RGZ0JlMwZpY
McCarthy, M. (2020). *Bach Prelude in C (31-EDO).* En SoundCloud. https://soundcloud.com/mwmccarthy/bach-prelude-in-c-31-edo
McClain, L. (s.f.). *Levi McClain.* Consultado el 27 de mayo de 2023. https://www.levimcclain.com/
McClain, L. (26 de abril de 2023). *What if Radiohead used 31 notes per octave instead of 12?* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=aXRtb4kKYEk
McClain, L. (19 de septiembre de 2022). *What If We Had 31 Notes Instead of 12?* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8Bi6bO-MCCo
Meantone temperament. (16 de mayo de 2023). En *Wikipedia.* https://en.wikipedia.org/wiki/Meantone_temperament
Mike Battaglia. (2021, February). *Sweet Lorraine (31-TET version) - Some Stride Piano for you all -. Mike Battaglia*. Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=RGZ0JlMwZpY

Milne, A., Sethares, W., & Plamondon, J. (2008). Tuning continua and keyboard layouts. *Journal of Mathematics and Music*, *2*(1), 1–19. https://doi.org/10.1080/17459730701828677

Monzo, J. (2005). *Meantone family tunings - error from 11-limit just intonation.* Tonalsoft. http://www.tonalsoft.com/enc/m/meantone-error.aspx

Motorola Scalatron. (17 de septiembre de 2018). En *Microtonal Encyclopedia*.
https://microtonal.miraheze.org/wiki/Motorola_Scalatron

Neutral third. (2 de mayo de 2023). En *Wikipedia* (en inglés).
https://en.wikipedia.org/wiki/Neutral_third

Nicholson, T. (2020). *Plainsound Harmonic Space Calculator.*
https://www.plainsound.org/HEJI/index.php

Nicholson, T. y Sabat, M. (2018). *Fundamental Principles of Just Intonation and Microtonal Composition.* Universität der Künste Berlin.
https://www.academia.edu/45160224/

Nicholson, T. y Sabat, M. (2020). *The Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation (HEJI).* https://marsbat.space/pdfs/HEJI2_legend+series.pdf

Pakkanen, L. (16 de septiembre de 2021). *Making Sense of Microtones by Stacking Fifths.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=z486ScNJBOo

Paul Rapoport (music researcher). (19 de marzo de 2023). En *Wikipedia* (en inglés).
https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Rapoport_(music_researcher)

Puhm, J. (2018). Harmonic Resources of 31 EMT and 31 EBMT. Consultado 19 de enero de 2023. En http://juhanpuhmmusic.ca/Juhan-Puhm-Compendium-Musica-Harmonic-Resources-31Et-EMT-31EBMT.pdf

Rapoport,P. (1987). *About 31-tone equal temperament*. En Huygens-Fokker Foundation. https://www.huygens-fokker.org/docs/rap31.html

Rapoport, P. (2010). *Songs of fruits and vegetables*. Consultado 12 de junio de 2023. En https://diapason.xentonic.org/cm/cm023.html

Relationship to 12-edo. (2023). Consultado el 15 de junio de 2023. En https://en.xen.wiki/w/31edo#Relationship_to_12-edo

Sabat, M., & Nicholson, T. (2021). The Helmholtz-Ellis JI Pitch Notation. Consultado el 1 de junio de 2023. En https://marsbat.space/pdfs/HEJI2_legend+series.pdf

Schell, M. (2018, January 3). The Late Works of György Ligeti (1923–2006). Consultado el19 de mayo de 2023. En https://www.secondinversion.org/2018/01/03/the-late-works-of-gyorgy-ligeti-1923-2006/

Segura, S. (2023). *Apuntes de Organología y Acústica*.

Sevish. (s.f.). Sevish – electronic microtonal music. Consultado 10 de junio de 2023. En https://sevish.com/

Suits, B. H. (n.d.). (https://pages.mtu.edu/~suits/chords.html) *Chords - Frequency Ratio.* Consultado el 24 de junio de 2023.

Taylor, C. (8 de octubre de 2021). *An intro to 31 equal on the Lumatone.* En YouTube.
https://www.youtube.com/watch?v=Bs-M5GXMVB8

Taylor, C. (4 de septiembre de 2022). *Schumann: The Poet Speaks in 31-equal on the Lumatone.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=rHka91Sodjs

Terpstra, S. (1988). *Toward a theory of meantone (and 31-ET) harmony.* En Huygens-Fokker Foundation. Consultado el 28 de mayo de 2023.
https://www.huygens-fokker.org/docs/terp31.html

The Riemann zeta function and tuning. (3 de mayo de 2023). En *Xenharmonic Wiki*.
https://en.xen.wiki/w/The_Riemann_zeta_function_and_tuning

Tonnetz. (28 de febrero de 2023). En *Wikipedia* (en inglés).
https://en.wikipedia.org/wiki/Tonnetz

Ups and downs notation. (20 de abril de 2023). En *Xenharmonic Wiki*.
https://en.xen.wiki/w/Ups_and_downs_notation

Weigel, S. (14 de octubre de 2019). *Quarter sharps and flats in the same diatonic key signature.* En YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=E_VD3tqwCAM

Weigel, S. (s. f.) *Stephen Weigel: xenharmonic composer-performer.* Consultado el 27 de mayo de 2023. https://www.stephenweigelcomposerperformer.com
Wild, J. (2014). *Genus, Species and Mode in Vicentino's 31-tone Compositional Theory.* https://mtosmt.org/issues/mto.14.20.2/mto.14.20.2.wild.php
Zhea Erose. (2021). *Arrival. LUMATONE [31edo]* . Consultado el 20 de mayo de 2023. En https://www.youtube.com/watch?v=cvaymi7x1cM